PART2　2次方程式の実数解の個数

要点①　2次方程式の実数解の個数

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ……①の解の公式は以下である。

$\geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b^2-4ac>0$ のとき

①は2つの異なる実数の解 $x=\dfrac{-b\quad\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b\quad\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ。

方程式の実数の解を，単に「　　　　　」という。

$b^2-4ac=0$ のとき

①は，ただ1つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{}}{2a}=$　　　をもつ。

2つの解が重なったものと考えて，この実数解を「　　　」という。

$b^2-4ac<0$ のとき

①は実数解をもたない。

b^2-4ac を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　　　」といい，「　」で表す。2次方程式の実数解の個数と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

2次方程式の実数解の個数

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の判別式　$D=b^2-4ac$　について

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる2つの実数解をもつ

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　ただ1つの実数解（重解）をもつ

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

例　2次方程式 $x^2+7x+5=0$ の判別式を D とすると

$D=$　　　　　$=29$

よって，この2次方程式の実数解の個数は　個である。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

より，D の正負は b'^2-ac，すなわち　　の正負と一致する。

したがって，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ においては，D の代わりに

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

を用いてもよい。

例　2 次方程式 $2x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}= \qquad\qquad =-5$$

よって，この 2 次方程式の実数解の個数は　個である。

要点 ②　2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつのは，この方程式の判別式を D とすると

・異なる 2 つの実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　D

・ただ 1 つの実数解(重解)をもつ　$\Longleftrightarrow$　D

の 2 つの場合である。よって，次のことが成り立つ。

2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D \geqq 0$

例　2 次方程式 $2x^2+x+k=0$ が実数解をもつときの定数 k の値の範囲を求める。

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot2\cdot k=1-8k$$

2 次方程式が実数解をもつのは D　　のときであるから

$$1-8k \geqq 0$$

よって，$k \leqq \frac{1}{8}$

2　(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(i)　$x^2+4x+1=0$　　(ii)　$x^2-3x+3=0$　　(iii)　$9x^2+6x+1=0$

(2)　2 次方程式 $3x^2+4x+m=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると $D=b^2-4ac$

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　ただ 1 つの実数解(重解)をもつ

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

特に $b=2b'$ のときは，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D\geqq 0$

第 9 講　PART2 確認問題

1　2 次方程式 $x^2+5x+2=0$ の実数解の個数は [ア] 個である。

2　2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の実数解の個数は [イ] 個である。

3　2 次方程式 $4x^2+4x+1=0$ の実数解の個数は [ウ] 個である。

4　2 次方程式 $2x^2+3x+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を次の①～④のうちから選べ。

[エ]

① $m>\dfrac{9}{2}$　　② $m<\dfrac{9}{2}$

③ $m>\dfrac{9}{8}$　　④ $m<\dfrac{9}{8}$

PART2　2次方程式の実数解の個数

2　(1)　次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(i)　$x^2+4x+1=0$　　(ii)　$x^2-3x+3=0$　　(iii)　$9x^2+6x+1=0$

(2)　2次方程式 $3x^2+4x+m=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=4^2-4\cdot1\cdot1=12>0$ より2個

（別解）　$\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot1=3>0$ より2個

(ii)　$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$ より0個

(iii)　$D=6^2-4\cdot9\cdot1=0$ より1個

（別解）　$\dfrac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$ より1個

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=4^2-4\cdot3\cdot m=16-12m$$

実数解をもつための条件は $D\geqq0$

よって $16-12m\geqq0$　より　$m\leqq\dfrac{4}{3}$

（別解）　$\dfrac{D}{4}=2^2-3\cdot m\geqq0$　より　$m\leqq\dfrac{4}{3}$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

判別式を D とすると，

$$D=5^2-4\cdot1\cdot2=17>0$$ [A]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**2 個**

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，
$D=b^2-4ac$
$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ 1 つの実数解（重解）をもつ
$D<0 \iff$ 実数解をもたない

2

[正解] イ：0

[解説]

判別式を D とすると，

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=-23<0$$ [B]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**0 個**

[B]　$D<0 \iff$ 実数解をもたない

3

[正解] ウ：1

[解説]

判別式を D とすると，

$$D=4^2-4\cdot4\cdot1=0$$ [C]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**1 個**

（別解）　$\dfrac{D}{4}=2^2-4\cdot1=0$ [D]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**1 個**

[C]　$D=0 \iff$ 1 つの実数解（重解）をもつ

[D]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，
$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

4 **[正解]** エ：④

[解説]

判別式を D とすると,

$$D=3^2-4\cdot 2\cdot m=9-8m$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための条件は $D>0$ だから, [E]

$$9-8m>0$$

$$\boldsymbol{m<\frac{9}{8}}$$

[E]　異なる 2 つの実数解をもつ $\Longleftrightarrow$ $D>0$